

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР В ПРОСТЕЙШЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Аннотация

Рассматривается простейшая механическая система, эволюция которой в фазовом пространстве описывается странным аттрактором. Численные расчеты показывают, что, в зависимости от параметров системы, фазовая траектория системы трансформируется от предельного цикла к фазовому аттрактору и обратно.

Ключевые слова: нелинейная динамика, хаос, предельный цикл, странный аттрактор, вычислительные методы, математическая модель, физическая модель.

Понятие «странный аттрактор» возникло при изучении нелинейных динамических систем. Развитию этой области научных исследований способствовало использование вычислительных методов с привлечением компьютерных расчетов, поскольку большинство задач нелинейной динамики не может быть решено только при использовании аналитических методов.

Аттрактором в диссипативных динамических системах называется множество точек в фазовом пространстве, к которому стремятся с течением времени все соседние фазовые траектории (см., например, [1]). Заметим, что с физической точки зрения под диссипативными системами можно понимать системы, в которых энергия упорядоченного движения переходит в энергию неупорядоченного движения (рассеивается). Такой переход в механических системах имеет место, когда действуют силы трения или силы неупругой деформации, так что любая реальная механическая система является диссипативной.

Аттрактором может быть конечная система точек в фазовом пространстве. Простейший пример – затухающие колебания. Аттрактором может быть замкнутая кривая в фазовом пространстве, в этом случае говорят о предельном цикле. Простейшие примеры – установившиеся вы-

нужденные колебания или периодические автоколебания в системах различной природы. В нелинейных системах может существовать аттрактор в виде незамкнутой кривой, который называют странным аттрактором. Впервые динамическая система, в которой существует странный аттрактор, была исследована Е.Н. Лоренцом в 1963 г. (подробно о системе Лоренца можно прочитать в литературе [1–3]). Сам термин «странный аттрактор» появился позднее [4].

«Странность» аттрактора (впервые авторы термина также заключали слово «странный» в кавычки) состоит в том, что, с одной стороны траектория в фазовом пространстве является строго детерминированной, то есть однозначно определяется начальным состоянием (точкой в фазовом пространстве в начальный момент времени). С другой стороны, малейшее отклонение от начальной точки приводит к совершенно иной траектории. В результате движение системы становится хаотическим, нерегулярным, но, тем не менее, детерминированным. В связи с этим странный аттрактор называют также стохастическим аттрактором [3].

Система Лоренца, которая традиционно приводится при ознакомлении с основами нелинейной динамики, представляет собой математическую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Система была получена при

исследовании конвекционных потоков в подогреваемых жидкостях и газах после существенного упрощения соответствующих уравнений. Эта система плохо описывает реальные физические системы, например, образование ячеек Бенара в подогреваемом слое жидкости вследствие конвекционных потоков (см., например, [2]). По сути дела система Лоренца является лишь удобной математической моделью, которой присущи некоторые особенности реальных динамических нелинейных систем. Кроме того, система Лоренца не является столь наглядной, как, например, механическая система. Эти замечания можно отнести и к некоторым другим примерам физических систем, в которых наблюдаются странные аттракторы. Например, Золочевским предложена модель так называемого гиростата (фактически часть гироскопа без внешней рамы) [1]. Если к такой системе прикладывать внешний момент сил, определенным образом зависящий от угловой скорости, то уравнения движения в точности совпадают с уравнениями Лоренца. Как можно хотя бы в какой-то степени реально осуществить подобное движение, не ясно. Более реалистичными и воспроизводимыми при натуральных экспериментах являются примеры систем, в которых наблюдаются электрические хаотические колебания, например, электронный генератор Чуа (см. [2]).

Между тем с физической точки зрения движение в системе Лоренца представляет собой хаотические автоколебания вблизи двух равновесных состояний. По-видимому, в механических системах с несколькими степенями свободы подобные движения не являются редким явлением. Однако, чем больше степеней сво-

боды у системы, тем менее наглядным является движение. Заметим, что в механических системах с одной степенью свободы странный аттрактор существовать не может (доказательство см., например, в [1, 2]). В то же время механическая система с двумя степенями свободы описывается четырьмя дифференциальными уравнениями первого порядка, то есть фазовое пространство является четырехмерным, вследствие чего сразу же теряется наглядность при изображении траектории в этом пространстве.

В данной работе мы приведем простейшую механическую систему с двумя степенями свободы, в которой наблюдается, как показывают вычисления, траектория в виде странного аттрактора и, в то же время, для изображения траектории в фазовом пространстве достаточно использовать трехмерное пространство.

Заметим, что простейшей механической системой, в которой наблюдаются автоколебания, является система с сухим трением (рис. 1). Помещенный на движущуюся ленту транспортера груз связан упругой силой с неподвижной опорой. Можно показать (см., например, [5]), что если сила сухого трения уменьшается с увеличением скорости тела относительно поверхности, то положение равновесия, в котором сила трения компенсирует силу упругости, является неустойчивым. В этом случае при малейшем отклонении системы от положения равновесия возникают автоколебания с разрастающейся амплитудой. Подобная зависимость силы трения (рис. 2) наблюдается в реальных системах, так что возникновение автоколебаний в этой системе можно наблюдать на опыте.

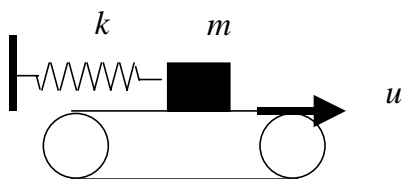


Рис. 1

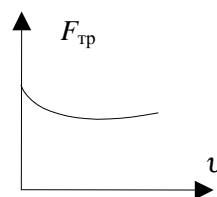


Рис. 2

Чтобы система качественно была подобна системе Лоренца, необходимо иметь, по крайней мере, два положения равновесия. Достигнуть этого можно, несколько усложнив систему с сухим трением. Пусть по ленте транспортера скользит груз, закрепленный на стержне, который может поворачиваться в горизонтальной плоскости (рис. 3, вид сверху). Пусть стержень удерживается в симметричном равновесном положении пружинами. Такая система напоминает самописец, записывающий данные на движущейся ленте.

Симметричное положение равновесия может быть как устойчивым, так и не устойчивым. Пусть при малых отклонениях от симметричного положения пружины создают момент силы упругости, пропорциональный углу отклонения φ :

$$M_{\text{упр}} = \alpha\varphi.$$

Момент силы трения при малых отклонениях также пропорционален углу:

$$M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} l \sin \varphi \approx F_{\text{тр}} l \varphi,$$

где l – длина стержня. Очевидно, что если сила трения достаточно большая, а силы упругости малы, то есть при $lF_{\text{тр}} > \alpha$, положение равновесия становится неустойчивым.

Помимо симметричного положения равновесия, в системе могут существовать два эквивалентных несимметричных положения равновесия (на рисунке изображены пунктиром). Можно ожидать (конкретный анализ сделаем далее), что, если сила трения уменьшается с увеличением скорости, эти положения равновесия также становятся неустойчивыми, и в системе могут возникнуть автоколебания. Такие колебания, в зависимости от параметров задачи, могут происходить вблизи одного из положений равновесия или с переходом от одного положения равновесия к другому. Однако, поскольку система имеет лишь одну степень свободы, такие колебания не могут быть хаотическими, так что соответствующий аттрактор представляет собой предельный цикл.

Чтобы получить хаотические колебания, добавим еще одну степень свободы,

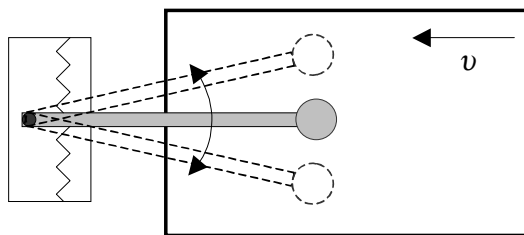


Рис. 3

«разрешив» устройству, на котором закреплен «самописец», двигаться без трения по направляющим перпендикулярно скорости ленты (рис. 4).

Подобное устройство напоминает подвижную каретку в матричном или струйном принтере, так что назовем все наше устройство «самописец на каретке». Заметим, что устройство вполне реальное (силу трения, действующую на каретку, можно сделать очень малой) и может быть воспроизведено на опыте.

Состояние системы описывается четырьмя зависящими от времени переменными: φ , $\dot{\varphi}$, Y , \dot{Y} , где Y – координата каретки, а точками, как обычно, обозначены производные по времени. Однако очевидно, что действующие в системе силы не зависят от координаты Y , поэтому для переменных φ , $\dot{\varphi}$, \dot{Y} получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, а координата Y может быть найдена простым интегрированием переменной \dot{Y} .

Чтобы получить уравнения движения, напишем закон изменения импульса си-

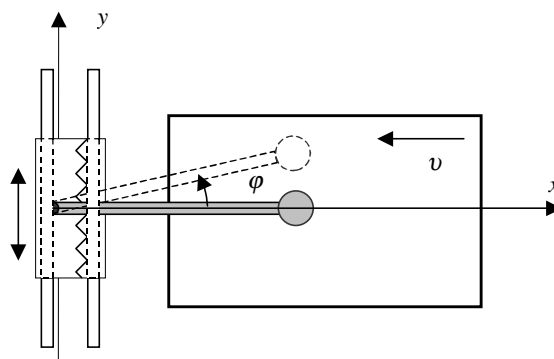


Рис. 4

стемы, состоящей из самописца и каретки:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{Q},$$

где \mathbf{Q} – сила со стороны направляющих каретки на рассматриваемую систему. Проекция этой силы на ось y равна нулю, поэтому имеет место уравнение:

$$\dot{P}_y = F_{\text{тpy}}. \quad (1)$$

Будем считать, что вся масса самописца сосредоточена на конце стержня и обозначим ее через m . Массу каретки обозначим через M . Для вычисления производной от импульса введем неподвижную систему отсчета и систему отсчета, связанную с кареткой. Обозначим через \mathbf{R} и \mathbf{R}_c радиус-векторы каретки и самописца в неподвижной системе отсчета, а через \mathbf{r}_c – радиус-вектор конца самописца, касающегося ленты. Очевидно, имеет место равенство:

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{r}_c + \mathbf{R}.$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим связь между соответствующими скоростями:

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{v}_c + \mathbf{V}.$$

В результате для интересующей нас проекции импульса системы получим выражение:

$$P_y = MV_y + m(v_y + V_y).$$

Очевидно, что $V_y = \dot{Y}$. Проекцию скорости v_y можно найти, продифференцировав проекцию радиус-вектора \mathbf{r}_c на ось y :

$$v_y = \frac{d}{dt}(l \sin \varphi) = l\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Таким образом:

$$P_y = M\dot{Y} + m(\dot{Y} + l\dot{\varphi} \cos \varphi).$$

Для производной от проекции импульса, стоящей в левой части уравнения (1), получим:

$$\dot{P}_y = (M + m)\ddot{Y} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Найдем выражение для силы трения. Она направлена против скорости конца самописца относительно ленты. Обозначим эту скорость через \mathbf{u} , тогда выраже-

ние для силы трения можно записать в виде:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\mathbf{u}K(u),$$

где $K(u)$ – функция, определяющая зависимость силы трения от модуля скорости. Если сила трения подчиняется закону Кулона-Амонтона, то:

$$K(u) = \frac{k}{u},$$

где k – коэффициент трения. Если сила трения убывает с ростом скорости, то функция $K(u)$ убывает быстрее, чем u^{-1} . Далее мы приведем возможный вид этой функции при проведении численного расчета.

Обозначим теперь через \mathbf{v} скорость движения ленты. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{V}_c - \mathbf{v}$, и для силы трения получим выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{тр}} &= -(\mathbf{v}_c + \mathbf{V} - \mathbf{v})K(u) = \\ &= \mathbf{F}_{\text{тр}}^{(1)} + \mathbf{F}_{\text{тр}}^{(2)} + \mathbf{F}_{\text{тр}}^{(3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\mathbf{F}_{\text{тр}}^{(1)} = -\mathbf{v}_c K(u), \quad \mathbf{F}_{\text{тр}}^{(2)} = -\mathbf{V}K(u),$$

$$\mathbf{F}_{\text{тр}}^{(3)} = \mathbf{v}K(u).$$

Для проекций скоростей на ось y найдем выражения:

$$v_{cy} = \frac{d}{dt}(l \sin \varphi) = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad V_y = \dot{Y}, \quad v_y = 0.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), можно привести это уравнение к виду:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{Y} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi = \\ = ml\dot{\varphi}^2 - u_y K(u), \end{aligned} \quad (3)$$

где проекция скорости \mathbf{u} на ось y определяется выражением:

$$u_y = \dot{Y} + l\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (4)$$

Для нахождения модуля скорости u получим выражения для проекций скоростей \mathbf{v}_c , \mathbf{V} и \mathbf{v} на ось x :

$$v_{cx} = \frac{d}{dt}(l \cos \varphi) = -l\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$V_x = 0, \quad v_x = -v.$$

В результате выражение для модуля скорости u принимает вид:

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \\
&= \sqrt{(v_{cx} + V_x - v_x)^2 + (v_{cy} + V_y - v_y)^2} = \\
&= \sqrt{v^2 + \dot{Y}^2 + (l\dot{\phi})^2 + 2l\dot{\phi}(\dot{Y} \cos \varphi - v \sin \varphi)}.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Уравнения (3) недостаточно для полного описания движения системы. Второе уравнение можно получить, рассматривая движение самописца в системе отсчета, связанной с кареткой. Это уравнение описывает движение материальной точки по окружности. Поскольку эта система отсчета неинерциальная, в уравнении необходимо учесть силу инерции:

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{A},$$

где через \mathbf{A} обозначено ускорение каретки в неподвижной системе отсчета. Уравнение движения материальной точки по окружности может быть записано в виде:

$$ml^2\ddot{\phi} = M_i + M_{\text{тр}} + M_{\text{упр}}, \tag{6}$$

где ml^2 – момент инерции, $\ddot{\phi}$ – угловое ускорение, M_i – момент силы инерции, $M_{\text{тр}}$ – момент силы трения, $M_{\text{упр}}$ – момент силы упругости пружин.

Найдем выражения для моментов сил, входящих в уравнение (6). При положительном значении величины \dot{Y} сила инерции направлена, как изображено на рис. 5, а выражение для момента силы инерции имеет вид:

$$M_i = -l \cos \varphi F_i = -lm\dot{Y} \cos \varphi.$$

Выражение для момента силы трения можно, в соответствии с равенством (2), представить в виде трех слагаемых:

$$M_{\text{тр}} = M_{\text{тр}}^{(1)} + M_{\text{тр}}^{(2)} + M_{\text{тр}}^{(3)}.$$

Соответствующие силы трения при $\dot{\phi} > 0$ и $\dot{Y} > 0$ изображены на рис. 5. Вычисляя плечи соответствующих сил, получим выражения для моментов сил:

$$M_{\text{тр}}^{(1)} = -lK(u)\dot{\phi},$$

$$M_{\text{тр}}^{(2)} = -lK(u)\dot{Y} \cos \varphi,$$

$$M_{\text{тр}}^{(3)} = lvK(u) \sin \varphi.$$

Наконец, момент сил упругости пружин можно представить как некоторую функцию от угла φ . При малых углах эта функция линейно зависит от φ . Мы добавим также нелинейную (кубическую) зависимость, так что выражение для момента сил принимает вид:

$$M_{\text{упр}} = -\alpha\varphi - \beta\varphi^3,$$

где α и β – некоторые положительные константы.

Подставляя полученные выражения для моментов сил в уравнение (6), его можно привести к виду:

$$ml^2\ddot{\phi} + ml\ddot{Y} \cos \varphi = -lu_{\varphi}K(u) - \alpha\varphi - \beta\varphi^3, \tag{7}$$

где $u_{\varphi} = \dot{\phi} + \dot{Y} \cos \varphi - v \sin \varphi$ – проекция скорости \mathbf{u} на ось, перпендикулярную стержню.

Система уравнений (3) и (7) представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, решив которую можно найти переменные φ , $\dot{\phi}$, \dot{Y} , а затем и переменную Y . Поскольку система уравнений нелинейная, для ее решения необходимо использовать численные методы. Для этого удобно предварительно произвести преобразование масштаба. Именно, за единицу длины примем длину стержня l , за единицу массы – массу m . Обозначим $M/m = \mu$. Единицу времени выберем так, чтобы в новой системе единиц коэффициент α в уравнении (7) обратился в единицу. В результате система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} + \ddot{Y} \cos \varphi &= -u_{\varphi}K(u) - \varphi - \beta\varphi^3, \\
(\mu + 1)\ddot{Y} + \ddot{\phi} \cos \varphi &= \dot{\phi}^2 - u_y K(u),
\end{aligned}
\tag{8}$$

где

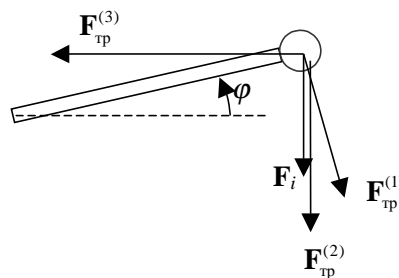


Рис. 5

$$\begin{aligned} u_y &= \dot{Y} + \dot{\phi} \cos \phi, \\ u_\phi &= \dot{\phi} + \dot{Y} \cos \phi - v \sin \phi, \\ u &= \sqrt{v^2 + \dot{Y}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}(\dot{Y} \cos \phi - v \sin \phi)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для констант v и β мы оставили те же обозначения, но их значения выражаются теперь в новой системе единиц.

Для численного расчета необходимо также смоделировать функцию $K(u)$. Для этого могут применяться различные модели (см., например, [1]). Мы примем модель, в которой сила трения монотонно убывает с увеличением скорости:

$$F_{\text{тр}} = uK(u) = K_m + \frac{\Delta K}{u/V_k + 1}.$$

Смысл констант, входящих в эти выражения: K_m – минимальное значение силы трения, ΔK – разность между максимальным и минимальным значением силы трения, V_k – характерный масштаб скорости, на котором сила трения убывает от максимального значения до значения, близкого к минимальному (рис. 6).

При таком определении силы трения выражение для функции $K(u)$ принимает вид:

$$K(u) = \frac{1}{u} \left(K_m + \frac{\Delta K}{u/V_k + 1} \right).$$

Формально при $u \rightarrow 0$ функция $K(u)$ стремится к бесконечности. Хотя в выражениях, входящих в уравнения (8), бесконечностей не получается, решение системы дифференциальных уравнений при помощи стандартных процедур, входящих в вычислительные среды, становится затруднительным. Чтобы избежать появления расхождений при выполнении вычисли-

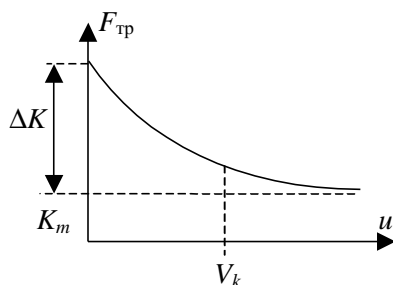


Рис. 6

тельных процедур, проще всего несколько модифицировать выражение для функции $K(u)$, положив:

$$K(u) = \frac{1}{u + \varepsilon} \left(K_m + \frac{\Delta K}{u/V_k + 1} \right), \quad (10)$$

где ε малая константа ($\varepsilon \ll v$, $\varepsilon \ll V_k$).

Систему двух дифференциальных уравнений (8) можно свести к системе трех дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для этого введем трехмерный вектор \mathbf{W} с компонентами:

$$w_1 = \phi, \quad w_2 = \dot{\phi}, \quad w_3 = \dot{Y}.$$

Тогда систему уравнений (8) можно переписать в виде:

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{F}(\mathbf{W}), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{W}),$$

\mathbf{U}^{-1} матрица, обратная к матрице

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos w \\ 0 & \cos w & 1 + \mu \end{pmatrix},$$

а вектор \mathbf{G} определяется формулой:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 - \beta w_1^3 - u_\phi K(u) \\ -w_2^2 \sin w_1 - u_y K(u) \end{pmatrix}.$$

Функции времени u_ϕ , u_z и u также выражаются через компоненты вектора \mathbf{W} :

$$u_y = w_3 + w_2 \cos w_1,$$

$$u_\phi = w_2 + w_3 \cos w_1 - v \sin w_1,$$

$$u = \sqrt{v^2 + w_3^2 + w_2^2 + 2w_2(w_3 \cos w_1 - v \sin w_1)}.$$

Полученная система уравнений, с точки зрения математики, выглядит, безусловно, сложнее, чем система Лоренца, однако она описывает более реальный и наглядный физический объект. Само же численное решение системы полученных уравнений при использовании современных процедур решения систем дифференциальных уравнений не вызывает больших трудностей.

Численный эксперимент показывает, что при определенных условиях решение действительно имеет вид странного ат-

рактора. На рис. 7 приведено решение при следующих значениях параметров: $\beta = 2$, $\mu = 1$, $K_m = 0,1$, $\Delta K = 5$, $V_k = 1$, $\nu = 1,3$. Как видно из рисунка, движения системы представляют собой колебания «самописца» в областях, близких к положениям равновесия $\varphi \approx \pm 50^\circ$. Эти положения равновесия определяются из первого из уравнений (8) при подстановке

$$\dot{Y} = \dot{\varphi} = 0, \quad u_\varphi = -\nu \sin \varphi, \quad u = \nu,$$

в результате чего для углов $\pm\varphi_0$ получается уравнение:

$$\frac{\varphi_0 + \beta\varphi_0^3}{\sin \varphi_0} = \nu K(\nu). \quad (12)$$

Как видно из графиков, колебания разрастаются по амплитуде, а затем сбиваются с переходом в область другого равновесного положения. Сбой, как показывает численный эксперимент, происходит случайным образом.

Странный аттрактор должен обладать определенными свойствами (см. [1, 2]), которые также проверялись при проведе-

нии численного эксперимента. Во-первых, спектр движения имеет характер непрерывного спектра, то есть отсутствуют четко выраженные дискретные линии. Спектр приведен на правом нижнем графике. Во-вторых, устойчивость движения определяется показателями Ляпунова, в данном случае $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Сумма показателей для диссипативной системы должна быть отрицательной. Эта сумма определяется дивергенцией фазового потока:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial w_i}, \quad (13)$$

где \mathbf{F} – функция, входящая в уравнение (11). Сумма показателей Ляпунова для аттрактора вычисляется по формуле ([2]):

$$\sum_{i=1}^3 \Lambda_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{F}(t') dt'.$$

В случае странного аттрактора значение старшего показателя Ляпунова должно быть положительным. Его значение вычислялось по методу, предложенному в монографии [2].

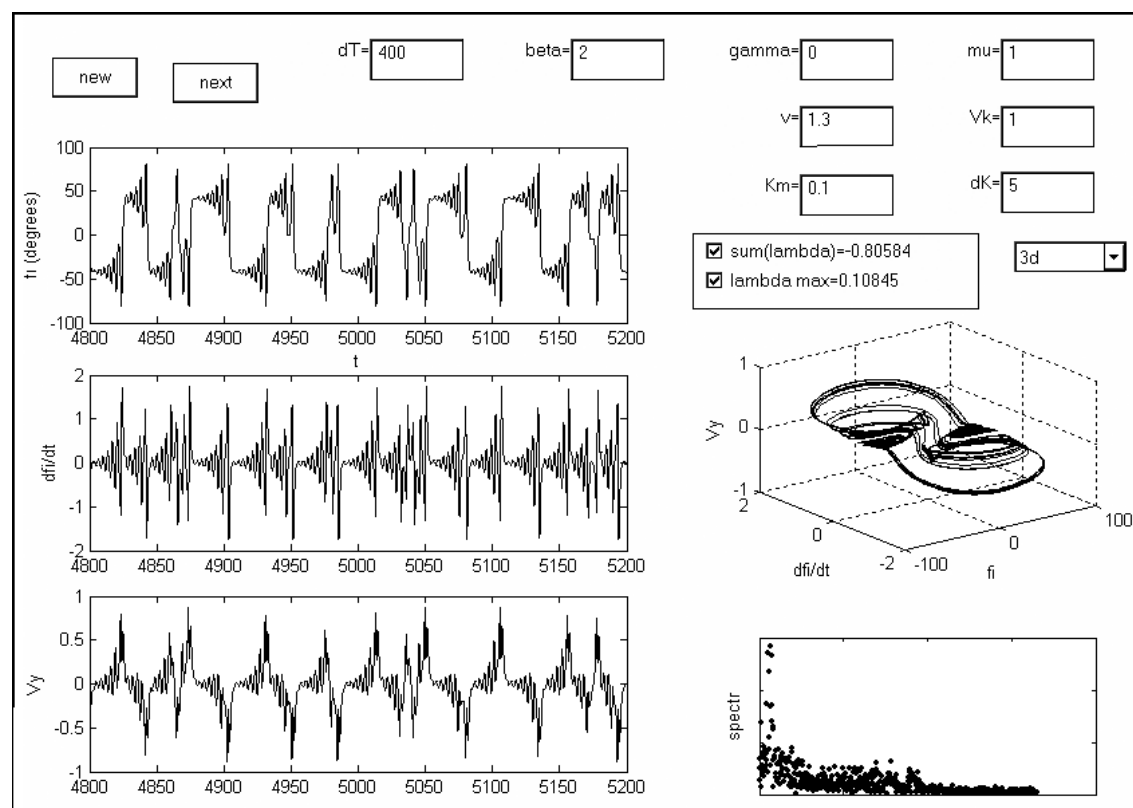


Рис. 7

Как видно из рисунка, значение суммы показателей Ляпунова в данном случае приблизительно равно $-0,8$ (естественно, при численном расчете вычисление проводилось на конечном временном интервале), а значение старшего показателя – приблизительно $0,1$.

При изменении всего одного параметра – скорости движения ленты ν на численном эксперименте наблюдался переход к предельному циклу. Результаты для $\nu = 1,2$ приведены на рис. 8. Несмотря на кажущееся сходство движения с тем, что изображено на рис. 7, в данном случае движение периодически, то есть имеет место предельный цикл. Это подтверждается тем, что в спектре отчетливо появляются дискретные линии, а старший показатель Ляпунова становится близким к нулю, что должно быть для предельного цикла.

Аналогичный переход от странного аттрактора к предельному циклу наблюдается и при увеличении параметра ν . На

рис. 9 приведены результаты расчета для $\nu = 1,9$. Движение также становится периодичным, спектр – дискретным, а старший показатель Ляпунова близким к нулю. В отличие от случая, изображенного на рис. 8, колебания происходят вблизи одного положения равновесия, в котором $\varphi_0 \approx 30^\circ$. Заметим, что в этом случае, в отличие от двух предыдущих, среднее значение скорости «каретки» отлично от нуля, так что она движется в направлении, противоположном оси y .

При некоторых других значениях параметров наблюдался переход к предельной точке, то есть при начальном состоянии, отличном от равновесного, система приходила к положению равновесия, и автоколебания не возбуждались. Таким образом, точки в фазовом пространстве, соответствующие несимметричным положениям равновесия (формула (12)), в зависимости от параметров задачи, могут быть как аттракторами, так и репеллерами (неустойчивыми положениями равно-

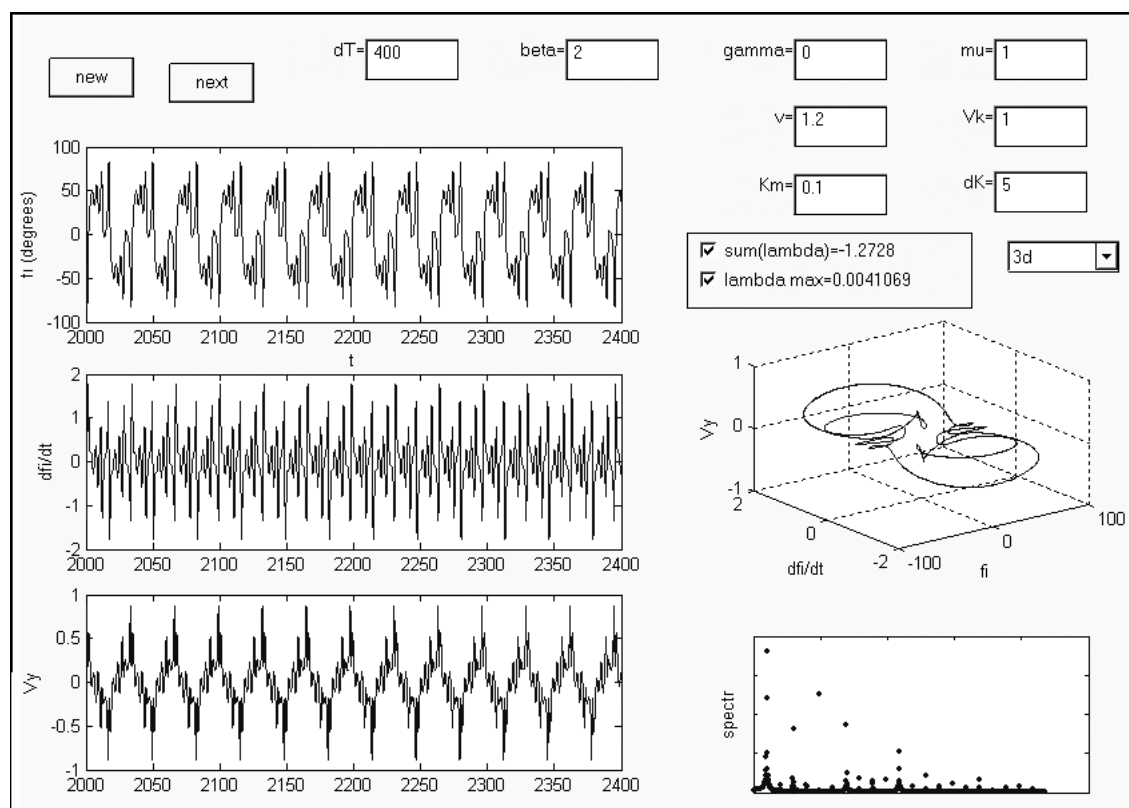


Рис. 8

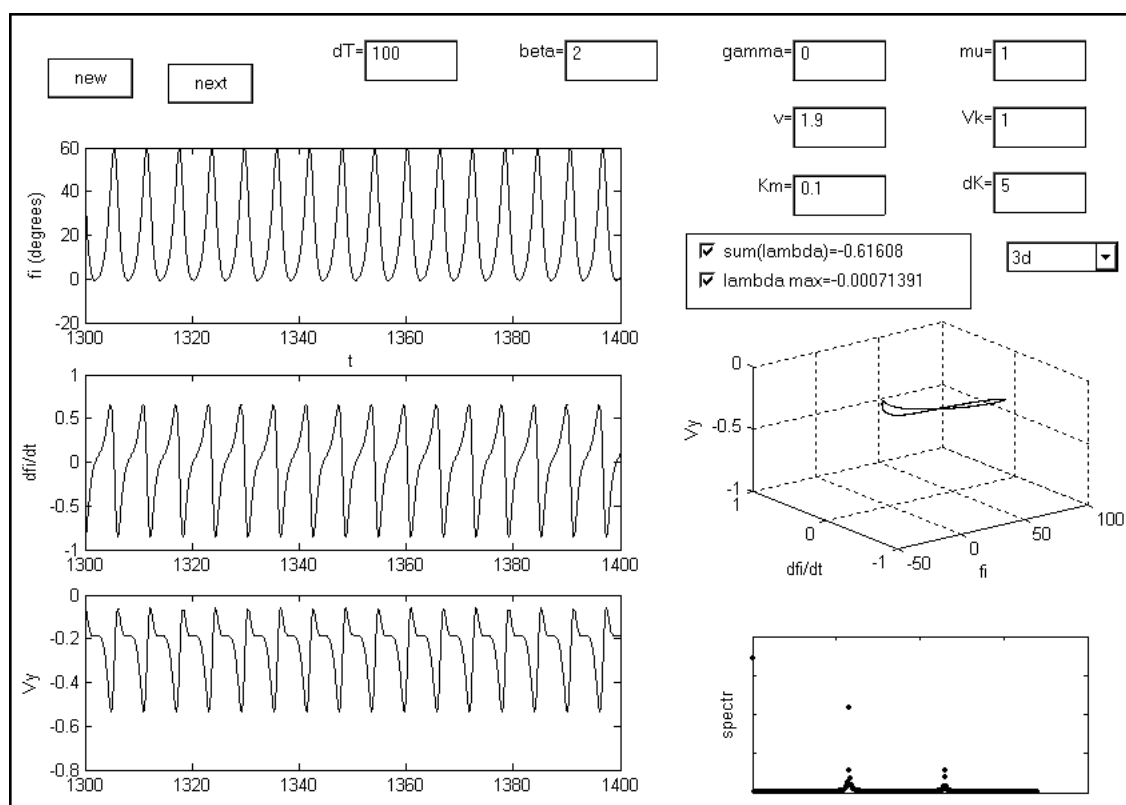


Рис. 9

весия). Устойчивость равновесия связана с дивергенцией фазового потока (13) в точках равновесия [2]. В частности, при положительном значении дивергенции положение равновесия является неустойчивым. Это условие сводится к неравенству:

$$K' < \frac{\mu + 2 \sin^2 \varphi_0}{(1 + \mu) \nu \sin^2 \varphi_0} K,$$

где угол φ_0 определяется из уравнения (12), а функция K и ее производная K' вычисляются при $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{Y} = 0$.

Литература

1. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Модели, методы, явления. М.-Ижевск, 2010.
2. Гритченко В.Т., Мацтпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику. М., 2007.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М., 1988.
4. Ruelle D., Takens F. // Commun. Math. Phys. 1971, v.20, p.167.
5. Кондратьев А.С., Ляпцев А.В. Физика. Задачи на компьютере. М.: Физматлит, 2008.

Полученные уравнения могут быть легко обобщены на случай, когда движение каретки тормозится силой вязкого трения, пропорциональной скорости: $F'_{\text{тр}} = \gamma \dot{Y}$. При незначительной величине параметра γ характер движения и переходы от странного аттрактора к предельным циклам сохраняются.

В заключение заметим, что движение предлагаемой системы действительно обладает наглядностью и может быть легко анимировано при использовании компьютерных средств.

Abstract

Approach and program implementation of the high interactive Java-applets intended for a simple mechanical system whose evolution in phase space describes by a strange attractor is considered. Numerical calculation shows that phase trajectory can transform from limited circle to strange attractor and back to limited circle when the set of parameters of the system changes.

Keywords: nonlinear dynamics, chaos, limit cycle, strange attractor, computational methods, mathematical model, physical model.



Наши авторы, 2010.

Our authors, 2010.

*Ляцев Александр Викторович,
доктор физико-математических
наук, профессор, заведующий
кафедрой методики обучения
физике РГПУ им. А.И. Герцена,
urt_eno@mail.ru*